25.11.23 13эл

Математика

«Векторы в пространстве» - конспект.

Глава IV
Векторы в пространстве

§ 1 Понятие вектора в пространстве

38 Понятие вектора

В курсе планиметрии мы познакомились с векторами на плоскости и действиями над ними. Основные понятия для векторов в пространстве вводятся так же, как и для векторов на плоскости.

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется **вектором**. Направление вектора (от начала к концу) на рисунках отмечается стрелкой. Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется **нулевым**. Начало и конец нулевого вектора совпадают, и он не имеет какого-либо определенного направления. На рисунке 100, *а* изображены ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и нулевой вектор $\overrightarrow{TT}$, а на рисунке 100, *б* — ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, имеющие общее начало. Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$.

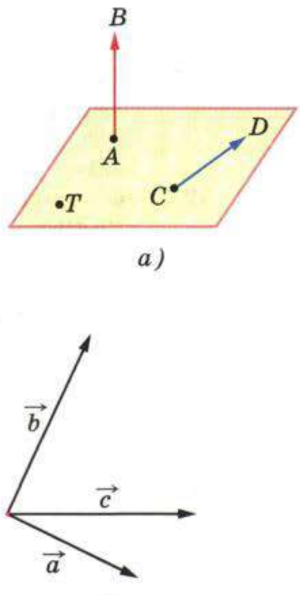


Рис. 100

Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и если при этом лучи AB и CD сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **сонаправленными**, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **противоположно направленными**. Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором. Запись $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ обозначает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, а запись $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$ — что векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ противоположно направлены. На рисунке 101 изображен параллелепипед. На этом рисунке $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$; векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}$ не являются ни сонаправленными, ни противоположно направленными, так как они не коллинеарны.

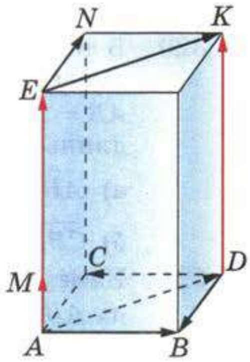
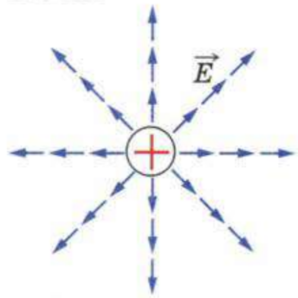


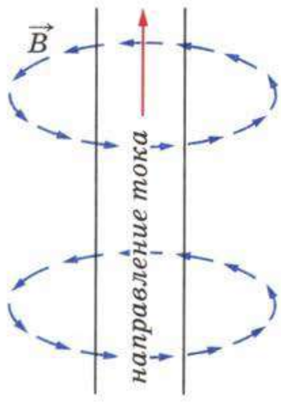
Рис. 101

Изучая векторы на плоскости, мы отмечали, что многие физические величины, например сила, перемещение, скорость, являются векторными величинами. При изучении электрических и магнитных явлений появляются новые примеры векторных величин. Электрическое поле, создаваемое в пространстве зарядами, характеризуется в каждой точке пространства вектором напряженности электрического поля. На рисунке 102, *а* изображены векторы напряженности электрического поля положительного точечного заряда.

Электрический ток, т. е. направленное движение зарядов, создает в пространстве магнитное поле, которое характеризуется в каждой точке пространства вектором магнитной индукции. На рисунке 102, *б* изображены векторы магнитной индукции магнитного поля прямого проводника с током.



а)



б)

Рис. 102

39 Равенство векторов

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны. На рисунке 101 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DK}$, так как $\overrightarrow{AE} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$ и $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{DK}|$, а $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$.

Если точка A — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен** от точки A. Нетрудно доказать, что **от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один**. В самом деле, пусть $\vec{a}$ — данный вектор, M — данная точка (рис. 103). Проведем через начало и конец вектора $\vec{a}$ и точку M плоскость и в этой плоскости построим вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{MN}$ искомый. Из построения ясно также, что $\overrightarrow{MN}$ — единственный вектор с началом M, равный вектору $\vec{a}$.

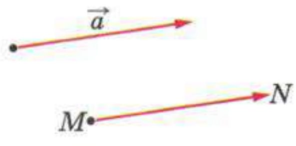


Рис. 103

§ 2 Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

40 Сложение и вычитание векторов

Введем правило сложения двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от какой-нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$ (рис. 106). Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Это правило сложения векторов называется **правилом треугольника**. Рисунок 106, *а* поясняет это название. Отметим, что по этому же правилу складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении и не получается треугольника. Рисунки 106, *б*, *в* иллюстрируют сложение коллинеарных векторов.

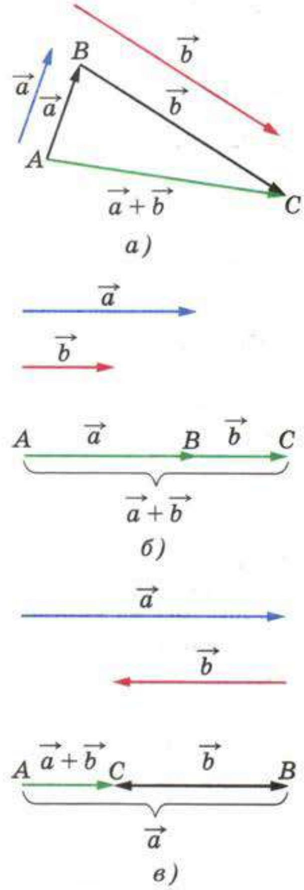


Рис. 106

Точно так же, как в планиметрии, доказывается, что **сумма $\vec{a} + \vec{b}$ не зависит от выбора точки A, от которой при сложении откладывается вектор $\vec{a}$.** Иными словами, если при сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу треугольника точку A заменить другой точкой A_1, то вектор $\overrightarrow{AC}$ заменится равным ему вектором $\overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 107). Докажите это утверждение самостоятельно.

Правило треугольника можно сформулировать в такой форме: **для любых трех точек A, B и C имеет место равенство**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Для сложения двух неколлинеарных векторов можно пользоваться также правилом параллелограмма, известным из курса планиметрии. Это правило пояснено на рисунке 108.

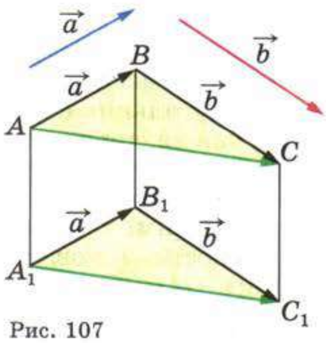


Рис. 107

Свойства сложения векторов, изученные в планиметрии, имеют место и для векторов в пространстве. Напомним их.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон);
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).

Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если их длины равны и они противоположно направлены. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор. Очевидно, вектор $\overrightarrow{BA}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$ (рис. 109).

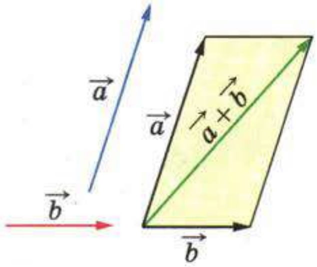
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Разность $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по формуле

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}), \qquad (1)$$

где $(-\vec{b})$ — вектор, противоположный вектору $\vec{b}$.

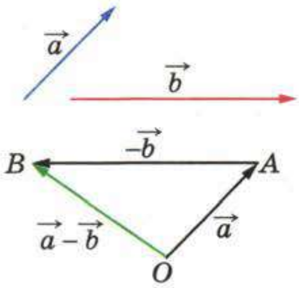
На рисунках 110, *а*, *б* представлены два способа построения разности двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Доказательства законов сложения и равенства (1) для векторов в пространстве ничем не отличаются от доказательств для векторов на плоскости.



Правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов
Рис. 108

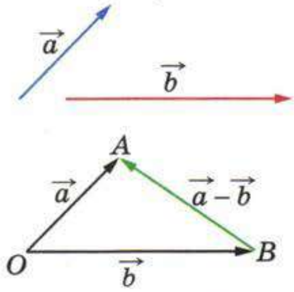
$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ — противоположные векторы
Рис. 109



$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=-\vec{b}$

$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$

а)



$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$

Рис. 110 *б)*

41 Сумма нескольких векторов

Сложение нескольких векторов в пространстве выполняется так же, как и на плоскости: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма — с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что **сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.**

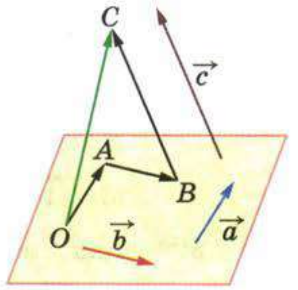
На рисунке 111 показано построение суммы трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: от произвольной точки O отложен вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, затем от точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, и, наконец, от точки B отложен вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. В результате получается вектор $\overrightarrow{OC}$, равный $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Аналогично можно построить сумму любого числа векторов. На рисунке 112 построена сумма $\overrightarrow{OE}$ пяти векторов: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$. Это правило построения суммы нескольких векторов называется **правилом многоугольника**. Заметим, однако, что, в отличие от случая векторов на плоскости, «многоугольник», который получается при построении суммы векторов в пространстве, может оказаться пространственным, т. е. таким, у которого не все вершины лежат в одной плоскости. Таковым является, например, «четырехугольник» $OABC$ на рисунке 111, с помощью которого построен вектор $\overrightarrow{OC}$.

Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные точки, то

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

Это правило проиллюстрировано на рисунке 113 для $n = 7$. Отметим, что если точки A_1 и A_n, т. е. начало первого вектора и конец последнего, совпадают, то сумма векторов равна нулевому вектору.



$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

Рис. 111

42 Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k > 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$. Из определения произведения вектора на число следует, что **для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.** Из этого определения следует также, что **произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор.**

Напомним основные свойства умножения вектора на число, известные нам для векторов на плоскости. Они имеют место и для векторов в пространстве. **Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:**

$(kl)\,\vec{a} = k\,(l\vec{a})$ (сочетательный закон);

$k\,(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (первый распределительный закон);

$(k + l)\,\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (второй распределительный закон).

Отметим, что $(-1)\,\vec{a}$ является вектором, противоположным вектору $\vec{a}$, т. е. $(-1)\,\vec{a} = -\vec{a}$. Действительно, длины векторов $(-1)\,\vec{a}$ и $\vec{a}$ равны: $|(-1)\,\vec{a}| = |-1|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|$. Кроме того, если вектор $\vec{a}$ ненулевой, то векторы $(-1)\,\vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены.

Точно так же, как в планиметрии, можно доказать, что **если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует число k такое, что $\vec{b} = k\vec{a}$.**

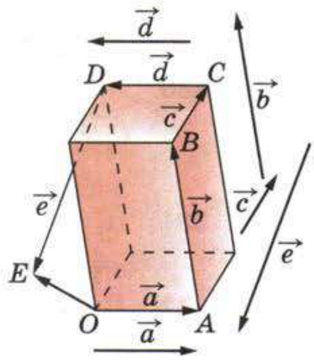
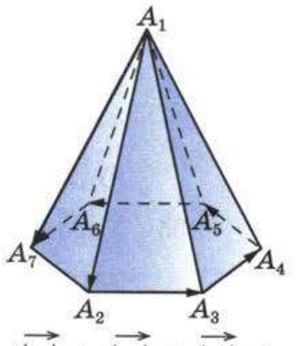


Рис. 112



$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+$
$+\overrightarrow{A_4A_5}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_6A_7}=$
$=\overrightarrow{A_1A_7}$

Рис. 113